Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2011/12

CAŁKA STIELTJESA

23/12/11

!!! MATERIAŁ NIEOBOWIĄZKOWY !!!

Całka Riemanna–Stieltjesa

Czym jest całka Riemanna–Stieltjesa?
Jest to odpowiednik całki Riemanna, ale ,,dla miary innej niż miara Lebesgue'a". Wziąłem w cudzysłów, gdyż zarówno całka Riemanna, jak i całka Riemanna–Stieltjesa nie odwołują się do pojęcia miary. Jednak całka Riemanna dla funkcji dostatecznie regularnych jest równa całce Lebesgue'a miarą Lebesgue'a. Podobnie całka Riemanna–Stieltjesa z funkcji dostatecznie regularnych jest równa całce Lebesgue'a miarą inną niż miara Lebesgue'a. Ta inna miara może być dowolną miarą borelowską na prostej.

Jak skonstruowana jest całka Riemanna–Stieltjesa bez użycia pojęcia miary?
Każda miara borelowska na prostej, która jest skończona na przedziałach skończonych, wyznacza (i jest wyznaczona przez) swoją dystrybuantę. To właśnie za pomocą dystrybuanty konstruuje się całkę Riemanna–Stieltjesa. Można przy tym nie wiedzieć, że używana przez nas niemalejąca prawostronnie ciągła funkcja α to dystrybyanta jakiejś miary. Po prostu definiujemy *całkę Riemanna–Stieltjesa z funkcją* α.
Czyli: parametrem całki Riemanna–Stieltjesa jest niemalejąca (to założenie w bardziej zaawansowanej wersji można zresztą opuścić – będzie to odpowiadało zastosowaniu miary znakowanej) i prawostronnie ciągłej (założenie o granicy lewostronnej w zerze można zaniedbać). Całkę Riemanna–Stieltjesa z funkcji f względem ,,funkcji całkującej" α oznacza się

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

albo w skrócie $\int_a^b f\, d\alpha$. Jest to pełna analogia do zapisu całki Riemanna, która jest całką Riemanna–Stieltjesa z funkcją całkującą $\alpha(x) = x$. Wtedy $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ wygląda tak: $\int_a^b f(x)\, dx$.
Nie będę szczegółowo przytaczał całej konstrukcji, gdyż nie jest to temat z teorii miary tylko z analizy. Powiem tylko, że całkę (oznaczoną, od a do b) z funkcji f definiuje się identycznie jak całkę Riemanna: najpierw tworzy się sumy dolne, sumy górne, potem definiuje się całkę dolną jako supremum sum dolnych i całkę górną jako infimum sum górnych, i jeśli całka dolna równa się całce górnej, to funkcję uznaje się za całkowalną, a wspólną wartość tych całek nazyw się całką z funkcji f. Jedyna różnica występuje w definicji sum dolnych i górnych: składnik sumy pochodzący z odcinka podziałowego $I_i = [a_i, b_i)$, który w sumie Riemanowskiej wynosił $y_i(b_i - a_i)$ (y_i oznaczało infimum bądź supremum funkcji f po przedziale I_i) zastępuje się wyrażeniem $y_i(\alpha(b_i) - \alpha(a_i))$. A zatem, to co w całce Riemanna

było tak naprawdę miarą Lebesgue'a przedziału I_i (czyli $(b_i - a_i)$) zastąpione zostało miarą tego przedziału inną miarą tego samego przedziału, właśnie taką miarą, dla której α jest dystrybuantą (bo wtedy miara przedziału I_i równa się $\alpha(b_i) - \alpha(a_i)$).

Tak definiuje się całkę właściwą. Następnie defniniuje się całkę niewłaściwą (gdy funkcja na jednym końcu przedziału ma ,,osobliwość", tzn. ucieka do nieskończoności lub gdy przedział ma koniec w nieskończoności) jako granicę całek właściwych przy jednym końcu przedziału całkowania zbiegającym do końca, w którym jest osobliwość.

Związki całki Riemanna–Stieltjesa z całką Lebesgue'a
Są one takie same jak związki całki Riemanna: każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna–Stieltjesa po przedziale skończonym (w sensie właściwym, to znaczy bez stosowania całki niewłaściwej) jest mierzalna, całkowalna w sensie Lebesgue'a i całka Riemanna–Stieltjesa jest równa całce Lebesgue'a. Istnieje wiele funkcji niecałkowalnych w sensie Riemanna–Stieltjesa, ale całkowalnych w sensie Lebesgue'a. Jedyna ,,przewaga" całki Riemanna–Stieltjesa, to to, że daje się policzyć niektóre całki niewłaściwe, mimo, że całki Lebesgue'a z f^+ i f^- są obie nieskończone.

Jeśli α jest różniczkowalna
W tym przypadku całkę Riemanna–Stieltjesa można sprowadzić do zwykłej całki Riemanna, tylko zamiast całkować funkcję f mnożymy ją najpierw przez pochodną funkcji α:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

Całka Lebesgue'a–Stieltjesa
Jest to po prostu całka Lebesgue'a dla miary na prostej innej niż miara Lebesgue'a, skończonej na przedziałach skończonych. Funkcja α (dystrybuanta naszej miary) nadal pojawia się jako parametr całki, ale to jest tylko kwestia nazewnictwa, gdyż całkę Lebesgue'a–Stieltjesa liczy się już tą samą metodą co całkę Lebesgue'a. Jeśli α jest dystrybuantą miary μ, to można napisać ,,po lebegowsku" $\int_{[a,b)} f\,d\mu$ albo stosować ,,zapis Stieltjesa" $\int_a^b f\,d\alpha$. Ten drugi zapis jest zresztą niebezpieczny, gdyż nie widać, jakie końce (otwarte czy domknięte) ma przedział całkowania, a przy całkowaniu miarą inną niż Lebesgue'a to może mieć znaczenie. Nietóre podręczniki za całkę Lebesgue'a–Stieltjesa uznają całkę Lebesgue'a w przypadku, gdy α jest różniczkowalna. Podany wcześniej wzór tłumaczy się wtedy an zapis lebegowski tak:

$$\int_{[a,b)} f\,d\mu = \int_{[a,b)} f\alpha'(x)\,d\lambda.$$

Odpowiada to temu, że miara, której dystrybuantą jest α t jest wtedy miarą Lebesgue'a ,,z gęstością" α'. Patrz opis tego typu miar w materiałach powtórkowych do II kolokwium.